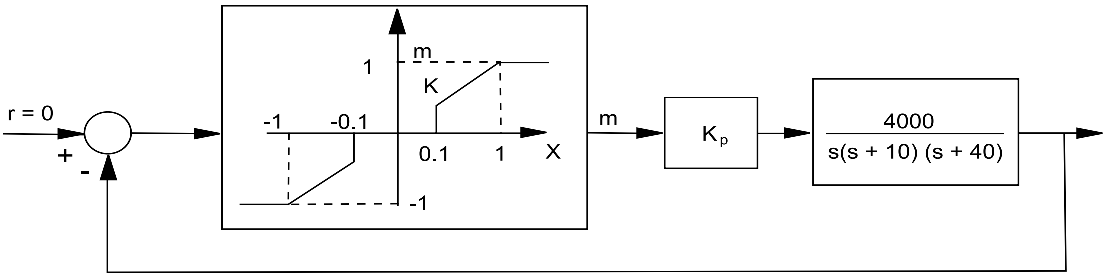
## Questão nº 20 – AUTOMAÇÃO E CONTROLE

O sistema de controle da figura abaixo apresenta na malha direta um dispositivo com características não lineares (zona morta e saturação).




A função descritiva associada ao elemento não linear é dada por:

$$N(X) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < |X| < 0{,}1 \\ \dfrac{2k}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\dfrac{0{,}1}{X}\right) + \left(\dfrac{0{,}1}{X}\right)\sqrt{1-\dfrac{0{,}01}{X^2}}\right] & \text{para } 0{,}1 \leq |X| \leq 1{,}0 \\ \dfrac{2k}{\pi}\left[\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{X}\right) - \sin^{-1}\left(\dfrac{0{,}1}{X}\right) + \left(\dfrac{0{,}1}{X}\right)\sqrt{1-\dfrac{0{,}01}{X^2}} + \left(\dfrac{1}{X}\right)\sqrt{1-\dfrac{1}{X^2}}\right] & \text{para } 1{,}0 < |X| < \infty \end{cases}$$

onde X é a amplitude do sinal de entrada no dispositivo não linear e k é a inclinação da parcela linear.

**a)** Determine a faixa de $K_p$ que garante a estabilidade em malha fechada, desconsiderando a não-linearidade.
**(valor: 2,0 pontos)**

**b)** Obtenha o valor de N(X), tal que o sistema apresente oscilação sustentada (sem amortecimento) na saída, tomando-se $K_p$ = 10 e supondo-se presente a não-linearidade. Obtenha, também, o valor da freqüência de oscilação.
**(valor: 5,0 pontos)**

**c)** Ajuste o valor de $K_p$ para obter uma oscilação sustentada na saída com amplitude igual a 0,2, considerando presente a não-linearidade.
**(valor: 3,0 pontos)**

### Comentários

**Conteúdos estabelecidos na questão:**
Controle de Processos.

**Habilidades aferidas na questão:**
Capacidade de: Aplicação de conhecimentos teóricos de Engenharia Elétrica a questões gerais encontradas em outras áreas.

**Padrão de Resposta Esperado:**

a) Desconsiderando-se a não-linearidade o sistema em malha fechada é dado por:

$$G_g(S) = \frac{4000\ K_p}{s^3 + 50s^2 + 400s + 4000\ K_p}$$

Ou seja, a equação característica é:

s3 + 50s2 + 400s + 4000Kp = 0

Aplicando-se o critério de Routh-Hurwitz temos:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 400 \\ s^2 & 50 & 4000\ K_p \\ s^1 & \dfrac{20000 - 4000\ K_p}{50} & 0 \\ s^0 & 4000\ K_p & \end{array}$$

Portanto, as condições de estabilidade são:

$0 < K_p < 5$

b) Levando-se em conta a não-linearidade o sistema em malha fechada é dado por:

$$G_g(s) = \frac{4000\ NK_p}{s^3 + 50s^2 + 400s + 4000\ NK_p}$$

Ou seja, para $K_p = 10$ a equação característica é:

$$s^3 + 50s^2 + 400s + 40000N = 0$$

Aplicando-se o critério de Routh-Hurwitz temos:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 400 \\ s^2 & 50 & 40000\ N \\ s^1 & \dfrac{20000 - 40000\ N}{50} & 0 \\ s^0 & 4000\ N & \end{array}$$

Uma oscilação sustentada ocorrerá se:

$$\frac{20000 - 40000\ N}{50} = 0$$

Portanto, o valor de N(x) é:

$$N(X) = 0.5$$

O valor da freqüência de oscilação é obtido a partir da segunda linha do critério de Routh-Hurwitz:

$$50s^2 + 40000N = 0 \Rightarrow 50s^2 + 20000 = 0 \Rightarrow s = \pm 20j$$

Portanto, a freqüência de oscilação é de 20 rad/s.

c) Para uma oscilação sustentada na saída de amplitude unitária, temos que calcular o valor de N (X). Para X = 0,2 utilizamos a equação:

$$N(X) = \frac{2k}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{0.1}{X}\right) + \left(\frac{0.1}{X}\right)\sqrt{1 - \frac{0.01}{X^2}}\right]$$

para $0.1 \leq X \leq 1.0$

onde a inclinação da parcela linear é k = 1.

N (0,2) = 0,9423

Portanto, aplicando-se o critério de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 400 \\ s^2 & 50 & 40000\ NK_p \\ s^1 & \dfrac{20000 - 40000\ NK_p}{50} & 0 \\ s^0 & 40000\ NK_p & \end{array}$$

Portanto,

$$\frac{20000 - 4000\ NK_p}{50} = 0 \Rightarrow 4000\ NK_p = 20000$$

Como N (0.2) = 0.9423,

$$K_p = \frac{20000}{40000\ .\ 9423} = 5.3062$$

a freqüência de oscilação continua sendo $\omega = 20$ rad/s

**Outra maneira de resolver:**

a) Uma outra forma de resolver é utilizando o critério de Nyquist. Isto pode ser feito, pois a função descritiva depende somente da amplitude do sinal de entrada. Desprezando-se a não-linearidade podemos analisar a estabilidade do sistema analisando somente G(jω), fazendo isto em termos do diagrama de Nyquist.

$$G(j\omega) = \frac{4000}{(j\omega^3) + 50\,(j\omega)^2 + 400\,(j\omega)}$$

$$G(j\omega) = \frac{4000}{-j\omega^3 - 50\omega^2 + 400j\omega} = \frac{4000}{-50\omega^2 + (400j\omega - j\omega^3)}$$

$$G(j\omega) = \frac{4000[-50\omega^2 - (400j\omega - j\omega^3)]}{(-50\omega)^2 + (400\omega - \omega^3)^2} =$$

$$= \frac{-(50)\ (4000)\omega^2}{(-50\omega)^2 + (400\omega - \omega^3)^2} + j\frac{-(400\omega - \omega^3)}{(-50\omega)^2 + (400\omega - \omega^3)^2}$$

$$G(j\omega) = G_1(\omega) + jG_2(\omega)$$

A estabilidade do sistema depende do cruzamento ou não do eixo real. Ou, equivalentemente, quando a parte imaginária de G(jω) = 0.

$$G_2(\omega) = 0 \text{ Þ } -400\omega + \omega^3 = 0$$

Donde concluímos que ω = 0 rad/s, ω = - 20rad/s e ω = 20 rad/s. Como a freqüência deve ser positiva, temos que o digrama de Nyquist cruza o eixo real quando ω = 20 rad/s.

$$G1(20) = -\frac{1}{5}$$

Como o ponto crítico é -1 + 0j, este ponto será atingido quando $K_p = 5$. Ou seja, para que o sistema seja estável

$$0 < K_p < 5$$

b) Quando a não-linearidade está presente, a existência de uma oscilação sustentada depende de qual valor de N(X) leva o diagrama de Nyquist a passar exatamente pelo ponto -1 + 0j. Matematicamente, devemos encontrar N(X) tal que:

$$1 + N(X) + Kp\ G(20j) = 0$$

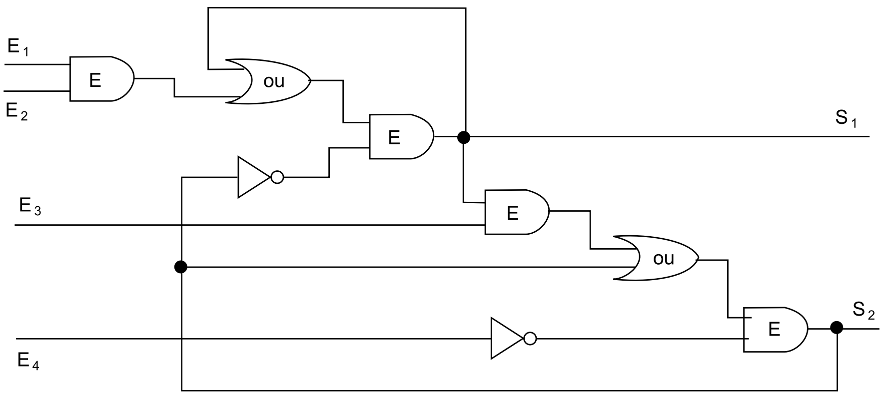
Para $K_p = 10$ e $G(20j) = -\frac{1}{5}$ temos que:

$$N(X) = 0.5$$

c) Para X = 0.2 temos que N(0.2) = 0.9423.

$$1 + N\ (0.2) + K_p\ G(20j) = 0 \text{ Þ } K_p = 5.3062$$

## Questão nº 21 – AUTOMAÇÃO E CONTROLE




Dada a lógica de comando digital acima, escreva:

**a)** as equações booleanas equivalentes para as saídas $S_1$ e $S_2$; **(valor: 2,0 pontos)**

**b)** um programa equivalente para CLP em "Instruction List"; **(valor: 4,0 pontos)**

**c)** um programa equivalente para CLP em "Ladder Diagram". **(valor: 4,0 pontos)**

### Comentários

**Conteúdos estabelecidos na questão:**
Automação de Sistemas.

**Habilidades aferidas:**
Capacidade de: aplicação de conhecimentos teóricos de Engenharia Elétrica a questões gerais encontradas em outras áreas.

**Padrão de Resposta Esperado:**
a) As equações booleanas são:

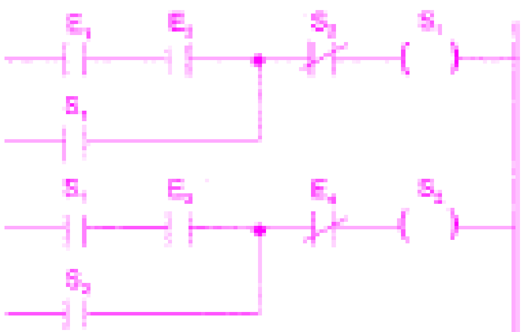
$S1 = (E1\ E2 + S1)\ \overline{S2}$

$S2 = (S1\ E3 + S2)\ \overline{E4}$

b) O programa em Instruction List

LD $E_1$
AND $E_2$
OR $S_1$
ANDN $S_2$
OUT $S_1$
AND $E_3$
OR $S_2$
ANDN $E_4$
OUT $S_2$

c) Em Ladder Diagram temos:



## Questão nº 22 – AUTOMAÇÃO E CONTROLE

Um motor de corrente contínua com excitação constante é representado por:

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t)$$

As grandezas **v(t)**, **i(t)**, **R** e **L** são, respectivamente, a tensão, a corrente, a resistência e a indutância de armadura do motor e **e(t)** é a tensão induzida na armadura, que é proporcional à velocidade do motor.
No controle de **i(t)**, é utilizada uma fonte de tensão CC de saída variável que é modelada com um sistema de 1ª ordem dado por:

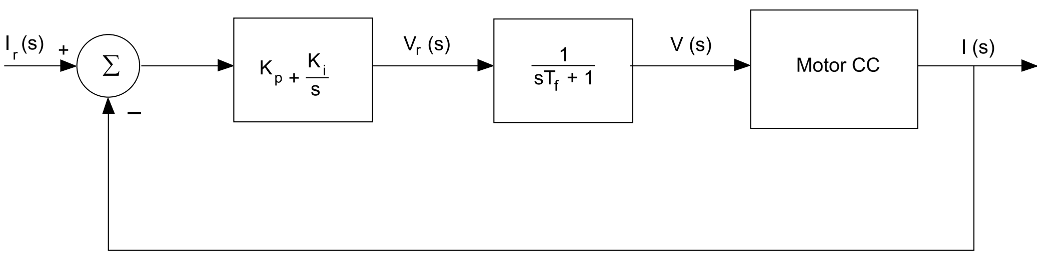
$$V(s) = \frac{V_r(s)}{sT_f + 1}$$

onde:

- **V(s)** e **$V_r$(s)** são, respectivamente, as Transformadas de Laplace das tensões de saída da fonte e de referência;
- **Tf** é a constante de tempo da fonte, igual a 0,5 ms.

Calcule os parâmetros **$K_p$** e **$K_i$** de um controlador PI contínuo para o controle de i(t), conforme a figura, de forma a compensar, por cancelamento, o pólo dominante do sistema $s = \frac{-R}{L}$ e a definir um sistema de malha fechada com pólos complexos $s_{1,2} = \frac{-1 \pm j}{2T_f}$

A tensão **e(t)** pode ser considerada nula no cálculo do controlador por variar lentamente. Os parâmetros do motor são R = 0,5Ω e L = 1,5mH. **(valor: 10,0 pontos)**




## Comentários

### Conteúdos estabelecidos na questão:

Controle.

### Habilidades aferidas:

Capacidade de: equacionamento de problemas de Engenharia Elétrica com propostas de soluções adequadas e eficientes; utilização de modelos aplicados e dispositivos e sistemas elétricos e magnéticos.

### Padrão de Resposta Esperado:

A função de transferência do motor é obtida aplicando-se a transformada de Laplace na equação diferencial fornecida com eo = 0. A transformada de Laplace desta equação fornece:

V(s) = RI(s) + sLI(s)

assim a função de transferência do motor é

I(s)/V(s) = (1/L)/(s + 1/T)

onde se introduziu a constante de tempo T = L /R

De acordo com o diagrama fornecido, a função de transferência de malha aberta do sistema $G_o$(s) é dada por:

$G_o(s) = [K_p + K_i /s] [(1/L )/(s + 1/T )] [1/(sT_f + 1)]$

$= [K_p (s + K_i /K_p)/s] [(1/L )/ (s + 1/T )] [1/(sT_f + 1)]$

Compensando-se 1/T por meio de $K_i /K_p$, isto é

$K_i /K_p = 1/T$

$G_o$(s) torna-se

$G_o(s) = [K_p /L]/[s(sT_f + 1)]$

A função de transferência de malha fechada é dada por:

$G_f (s)= G_o(s)/[1+ G_o(s)]$

Substituindo a expressão de $G_o$(s) obtém-se

$G_f (s) = [K_p /L]/[ T_f s^2 + s + K_p /L]$

os pólos do sistema em malha fechada são dados resolvendo-se o seguinte polinômio em s

$0 = T_f s^2 + s + K_p /L$

ou seja

$s_{1,2} = [-1 \pm \mathrm{sqrt}(1 - 4T_f K_p /L )]/2T_f$

O sistema deve ser alocado em malha fechada com

$s_{1,2} = (-1 \pm j)/(2T_f)$, então

$4T_f K_p /L = 2$

ou seja

$K_p = L /(2T_f)$

substituindo em $K_i /K_p = 1/T$ , obtém-se a expressão de $K_i$

$K_i = [L /(2T_f )](1/T ) = R /(2T_f)$

Substituindo-se os valores dos parâmetros, R = 0,5Ω, L = 1,5mH e $T_f$ = 0,5ms, obtém-se

$K_i$ = 500 (Ω/s)

$K_p$ = 1,5 (Ω)