3$\underline{a}$ lista de exercícios de Sistemas de Controle II

1. Encontre a transformada $\mathcal{Z}$ das seguintes seqüências:
(a) $u(k) = ka^{k-1}$, $k \geq 0$;
(b) $u(k) = k^3$, $k \geq 0$;
(c) $u(k) = 9k2^{k-1} - 2^k + 3$, $k \geq 0$;
(d) $x(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$, $t \geq 0$;
(e) $x(t) = te^{-at}$, $t \geq 0$.

2. Sabendo que a transformada de Laplace de um sinal $x(t)$ é

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)},$$

encontre a sua transformada $\mathcal{Z}$.

3. Encontre a transformada $\mathcal{Z}$ do sinal $u(t)$ cuja representação gráfica está mostrada na figura 1, supondo que o intervalo de amostragem seja igual a 1 segundo.

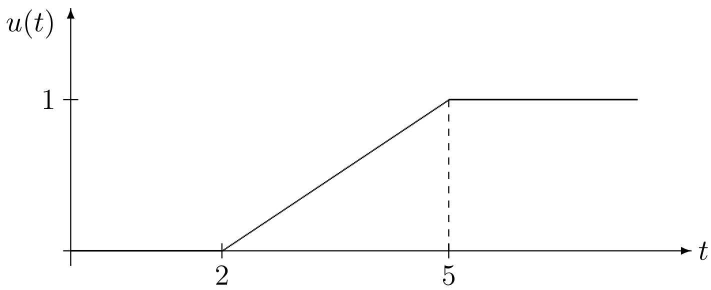

Figura 1: Sinal $u(t)$ para o exercício 3.

4. *(a)* Calcule $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, onde $x(k)$ é descrita por:

$$x(k) = \begin{cases} k+1, & k = 0,1,2,3 \\ 0, & k = 4,5,6,\ldots \end{cases}.$$

(b) Seja, agora, $y(k) = x(k)$, $0 \leq k \leq 3$ e $y(k) = y(k-4)$, $k \geq 4$ e $y(k) = 0$, $k < 0$, onde $x(k)$ foi definida no item *(a)*. Calcule $Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\}$.
(c) Seja $x(k)$ uma seqüência limitada de comprimento k, isto é, $x(k) = 0$, $k \geq n$ e defina $y(k) = x(k)$, $0 \leq k \leq n-1$ e $y(k) = y(k-n)$, $k \geq n$. Note que $y(k)$ é uma seqüência periódica de período n. Mostre que se $X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\}$, então

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} = \frac{X(z)}{1 - z^n}.$$

5. Define-se a convolução discreta de duas seqüências $f(k)$ e $g(k)$ como

$$h(k) = f(k) \star g(k) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)g(k-n),$$

que pode também ser expressa como:

$$h(k) = f(k) \star g(k) = \sum_{n=0}^{k} f(n)g(k-n)$$

quando $f(k) = g(k) = 0$, $k < 0$.

(a) Suponha que

$$f(k) = u_1(k) = \begin{cases} k, & k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \text{e } g(k) = \begin{cases} 2^k, & k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0, & k < 0 \end{cases}.$$

Calcule $h(k) = f(k) \star g(k)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

(b) Demonstre que se $f(k) \leftrightarrow F(z)$ e $g(k) \leftrightarrow G(z)$, então $h(k) = f(k) \star g(k) \leftrightarrow H(z) = F(z)G(z)$.

(c) Utilizando o resultado do item (b), encontre $h(k)$ para as seqüências $f(k)$ e $g(k)$ definidas em (a) e compare com os resultados obtidos em (a).

6. Obtenha a transformada $\mathcal{Z}$ inversa das seguintes funções:

(a) $X(z) = \dfrac{2z^3 + z}{(z-2)^2(z-1)}$

(b) $X(z) = \dfrac{10}{(z-1)(z-2)}$

(c) $X(z) = \dfrac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})^3}$

(d) $X(z) = \dfrac{z(z+2)}{(z-1)^2}$

(e) $X(z) = \dfrac{1 + 6z^{-2} + z^{-3}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,2z^{-1})}$

(f) $X(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{3z^4(z-1)}$

7. A seqüência $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ é conhecida como seqüência de Fibonacci e é formada de acordo com a seguinte lei:

$$x(k+2) = x(k+1) + x(k),$$

onde $x(0) = 0$ e $x(1) = 1$. Encontre a solução geral $x(k)$ dada por uma fórmula.

8. Considere um sistema descrito pela seguinte equação a diferenças finita:

$$y(k) - y(k-1) + 0,5y(k-2) = u(k-1) + u(k-2).$$

(a) Obtenha a função de transferência do sistema:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

(b) Obtenha uma representação em espaço de estados para o sistema.

(c) Desenhe o diagrama de simulação para a representação obtida no item *(b)*.

(d) Obtenha a resposta ao degrau unitário utilizando $Y(z) = T(z)U(z)$ e esboce graficamente $y(k)$.

9. Encontre uma equação de estados e desenhe o correspondente diagrama de simulação para cada um dos sistemas regidos pelas seguintes equações a diferenças lineares:

(a) $y(k+2) - 3y(k+1) - 4y(k) = u(k)$

(b) $y(k+2) - y(k+1) + 2y(k) = u(k+2) + u(k+1)$

(c) $y(k) - 9y(k-1) + 3y(k-2) = 2u(k-1) + u(k-1)$