

## 2a lista de exercícios de Sistemas de Controle II

1. Verifique se as seguintes realizações são observáveis e/ou controláveis:

$$(a) \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 2 \ 1] \underline{x}(t) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0 \ 1] \underline{x}(t) \end{cases}$$

2. Considere a seguinte realização em espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \ c_2 \ c_3] \underline{x}(t) \end{cases} .$$

Mostre que  $\lambda_1$  é um modo escondido com multiplicidade 2 e, portanto, uma realização equivalente para o sistema é:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \lambda_2 x(t) + b_3 u(t) \\ y(t) = c_3 x(t) \end{cases} .$$

3. Reduza a equação de estados abaixo a uma forma controlável e observável:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 1] \underline{x}(t) \end{cases} .$$

4. Verifique a controlabilidade e a observabilidade das equações de estados para o circuito da figura 1.

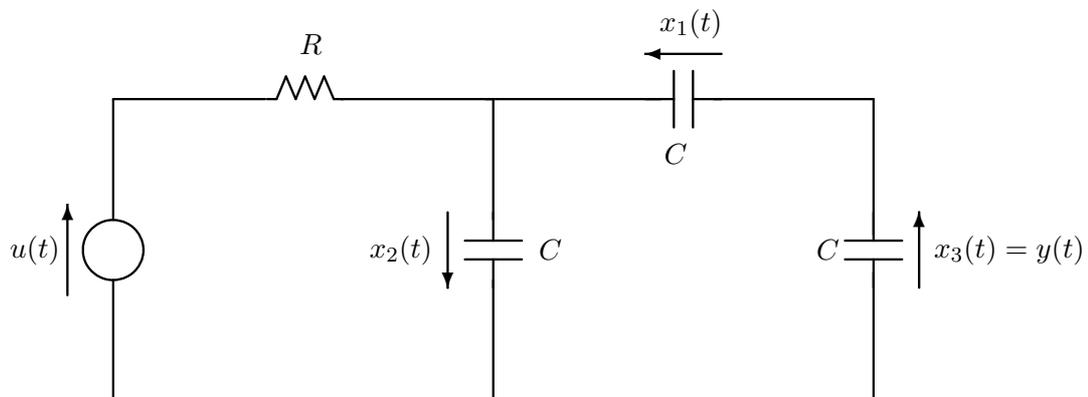


Figura 1: Circuito elétrico (exercício 4)

5. O sistema de plataforma da figura 2 pode ser usado para estudar sistemas de suspensão de automóveis. O sistema consiste de uma plataforma cujas extremidades estão conectadas ao chão por meio de molas e amortecedores. A massa da plataforma pode ser considerada nula e

conseqüentemente, o movimento das duas molas são independentes e metade da força é aplicada a cada um dos sistemas mola-amortecedor. As constantes das molas são  $k_1 = k_2 = 1N/m$  e os coeficientes de amortecimento são, respectivamente,  $f_1 = 2N/(m/s)$  e  $f_2 = 1N/(m/s)$ .

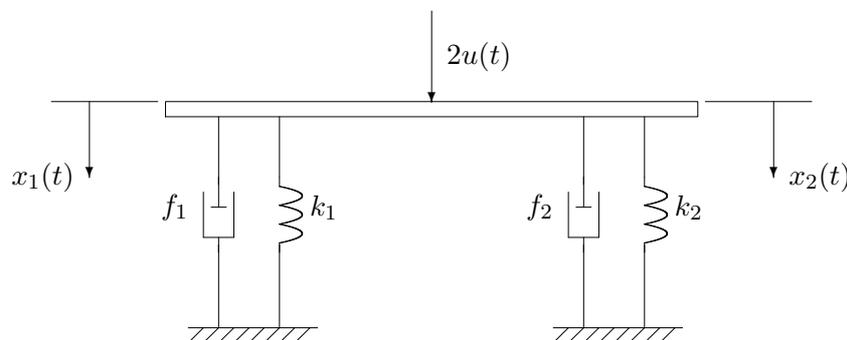


Figura 2: Sistema de plataforma (exercício 5)

(a) Obtenha as equações de estados para o sistema, tendo como estados os deslocamentos das duas molas ( $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ ) do ponto de equilíbrio.

(b) Se  $x_1(0) = 10$  e  $x_2(0) = -1$ , encontre  $u(t)$  que leve a plataforma ao ponto de equilíbrio em 2 segundos.

(c) Verifique se o sistema permanece controlável se  $f_1 = f_2 = 1N/(m/s)$ .

6. Considere o sistema cujo diagrama de blocos está representado na figura 3 abaixo. Obtenha uma realização em espaço de estados em que os estados são definidos conforme mostrado na figura e verifique se essa realização é controlável ou observável.

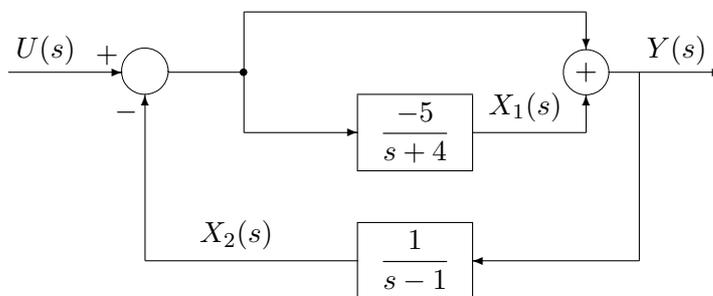


Figura 3: Diagrama de blocos do exercício 2

7. Sejam

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + b_1 u(t) \\ y(t) = c_1 x_1(t) + d u(t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + b_2 u(t) \\ y(t) = c_2 x_2(t) + d u(t) \end{cases}$$

duas realizações de igual número de estados de um mesmo SLIT. Demonstre que

$$\mathcal{O}(c_1, A_1) \mathcal{C}(A_1, b_1) = \mathcal{O}(c_2, A_2) \mathcal{C}(A_2, b_2)$$

onde  $\mathcal{O}(\cdot)$  e  $\mathcal{C}(\cdot)$  denotam as matrizes de controlabilidade e observabilidade, respectivamente.

8. Considere um sistema cujas equações de estados são:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 1] \underline{x}(t) \end{cases}.$$

(a) Este sistema é estável ou instável?

(b) Para uma realimentação de estados  $\underline{k} = [k_1 \quad k_2]$ , esboce graficamente a região do plano  $\mathbb{R}^2$  que contenha os vetores  $\underline{k}$  que tornam o sistema realimentado estável.

(c) Encontre o vetor de realimentação de estados  $\underline{k}$  de tal sorte que a matriz de estado do sistema realimentado tenha os seguintes autovalores:  $-1$  e  $-2$ .

9. Considere um SLIT com a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-2)(s+3)}.$$

(a) É possível obter uma realimentação de estados que torne a função de transferência do sistema após a realimentação igual a

$$G_f(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+3)}?$$

(b) O sistema realimentado será BIBO estável? Assintoticamente estável?

10. Considere a seguinte realização para um SLIT:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [2 \quad 0 \quad 0] \underline{x}(t) \end{cases},$$

e seja  $u(t) = pr(t) - \underline{k}^T \underline{x}(t)$ . Encontre o ganho  $p$  e o vetor de realimentação de estados  $\underline{k}$  de tal sorte que o sistema realimentado tenha autovalores  $-2$  e  $-1 \pm j1$  e rastree assintoticamente qualquer entrada do tipo degrau.

11. Para o sistema da questão anterior, seja agora:

$$u(t) = k_a \int_0^t [r(\lambda) - y(\lambda)] d\lambda + \underline{k}^T \underline{x}(t).$$

(a) Encontre o ganho  $k_a$  e o vetor de realimentação de estados  $\underline{k}$  de tal sorte que o sistema realimentado tenha autovalores em  $-2$ ,  $-3$  e  $-1 \pm j1$ .

(b) O sistema rastreará o degrau?

(c) Qual a vantagem do sistema realimentado obtido nesse exercício sobre aquele do exercício anterior.

12. Considere o carrinho da figura 4 no qual foi preso um pêndulo no ponto A. Sabe-se que a massa do carrinho é  $M$  e que a massa do pêndulo é  $m$ . As equações que descrevem o movimento

do pêndulo em relação ao deslocamento do carrinho e ao torque aplicado no carrinho são dadas por:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \theta(t) + u(t) \\ \ddot{x}(t) = -\beta\theta(t) - u(t) \end{cases},$$

onde

$$\beta = \frac{3m}{4(M+m)} = \text{cte}$$

e  $u(t)$  é o torque aplicado às rodas do carrinho por um motor elétrico. Deseja-se encontrar uma lei de controle que fará com que  $\theta(t) \approx 0$  e mantenha o carrinho na posição  $x(t) \approx 0$ . Para tanto, encontre ganhos  $k_1, k_2, k_3$  e  $k_4$  de tal forma que a realimentação de estados  $u(t) = -[k_1\theta(t) + k_2\dot{\theta}(t) + k_3x(t) + k_4\dot{x}(t)]$  tenha um autovalor duplo em  $\lambda = -1$  e um par de autovalores complexos em  $\lambda = -1 \pm j$ .

*Atenção:* A resposta será em função de  $\beta$ .

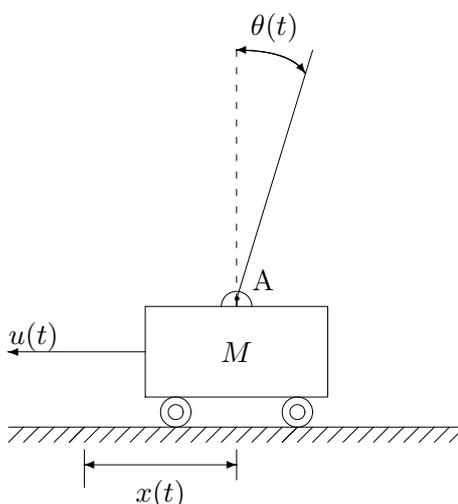


Figura 4: Carrinho com pêndulo invertido do exercício 12.

13. Um SLIT é descrito pelas seguintes equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -3x(t) + u(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases},$$

onde  $x(0) = x_0$ . Deseja-se, através de uma realimentação de estados, isto é,  $u(t) = -kx(t)$ , obter um novo sistema cuja saída  $y(t)$  e entrada  $u(t)$  sejam tais que a função de custo

$$J = \int_0^{\infty} [y^2(t) + ru^2(t)] dt$$

com  $r = 1$ , seja minimizada.

(a) Mostre que

$$J(k) = \begin{cases} \frac{k^2 + 1}{2(k + 3)}, & k > -3 \\ \infty, & k \leq -3 \end{cases}$$

(b) Encontre o valor de  $k$  que minimiza  $J(k)$ .

(c) Esboce graficamente a resposta  $y(t)$  do sistema realimentado.

14. Deseja-se estabilizar o sistema descrito pelas equações dinâmicas

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 0] \underline{x}(t) \end{cases}$$

através de uma realimentação de estados. Porém, como os estados não são acessíveis, esta realimentação será feita a partir de um observador de estados, conforme mostrado na figura 5. Encontre os vetores  $\underline{k}$  e  $\underline{l}$  de tal sorte que os autovalores do sistema realimentado, cujo vetor de estados é  $\underline{x}_f(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{e}(t) \end{bmatrix}$ , onde  $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$  sejam  $-1$  e  $-2$  e os outros dois sejam tais que o erro  $\underline{e}(t)$  decaia de forma subamortecida com coeficiente de amortecimento  $\zeta = 0.7$  e tenha um tempo de acomodação de aproximadamente 1 segundo.

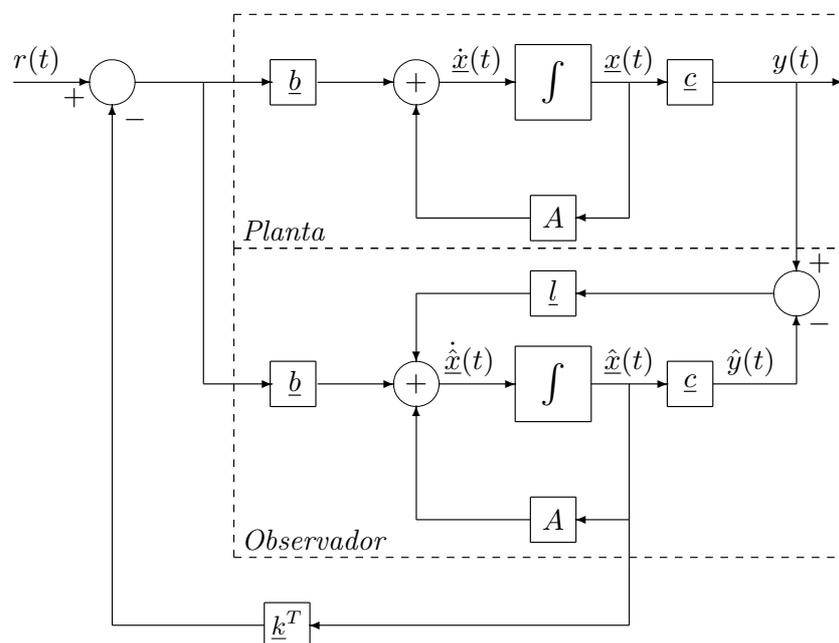


Figura 5: Diagrama esquemático de um sistema com realimentação de estados a partir de um observador de estados.