1ª lista de exercícios de Sistemas de Controle II

1. Obtenha uma representação em espaço de estados para o sistema da figura 1.

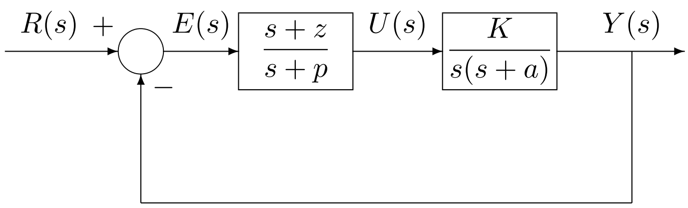

Figura 1: Diagrama de blocos do exercício 1

2. Considere o sistema cujo diagrama de blocos está representado na figura 2 abaixo. Obtenha uma realização em espaço de estados em que os estados são definidos conforme mostrado na figura.

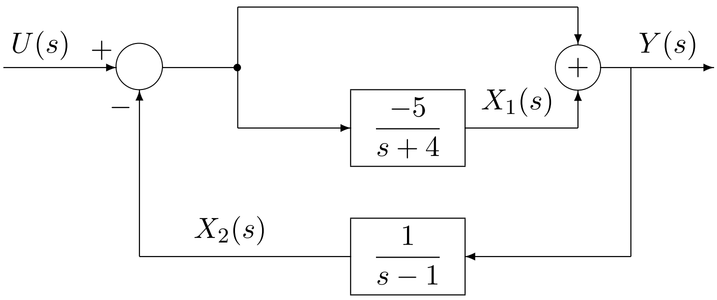

Figura 2: Diagrama de blocos do exercício 2

3. Obtenha as equações dinâmicas para o sistema representado na figura 3 em que os estados $\underline{x}_1(t)$ e $\underline{x}_2(t)$ são, respectivamente, a corrente elétrica através da indutância L e a tensão no capacitor C. Suponha que a entrada $u(t)$ seja a tensão $e(t)$ aplicada ao circuito e que a saída observada $y(t)$ seja igual à tensão $v_0(t)$.

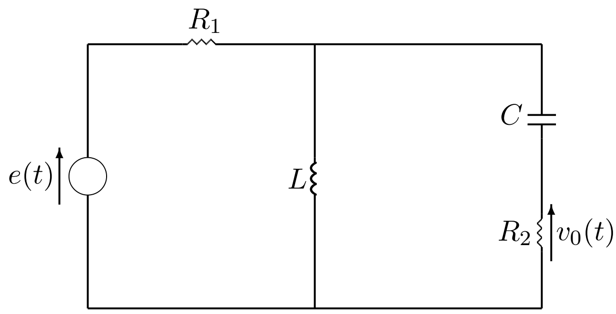

Figura 3: Circuito elétrico (exercício 3)

4. O diagrama de blocos da figura 4 representa uma estrutura com realimentação de estados em que os estados são estimados por um observador. O sistema a ser controlado tem as seguintes equações dinâmicas:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + \underline{b}u(t) \\ y(t) &= \underline{c}\underline{x}(t) \end{cases} .$$

O observador de estados é representado pela seguinte equação:

$$\dot{\hat{\underline{x}}}(t) = A\hat{\underline{x}}(t) + \underline{b}u(t) + \underline{l}[y(t) - \underline{c}\hat{\underline{x}}(t)],$$

onde $\underline{l}$ é o vetor de ganhos do observador e $\hat{\underline{x}}(t)$ é o estado estimado. A dinâmica do erro de estimação é descrita por $\underline{e}(t) = \underline{x}(t) - \hat{\underline{x}}(t)$.

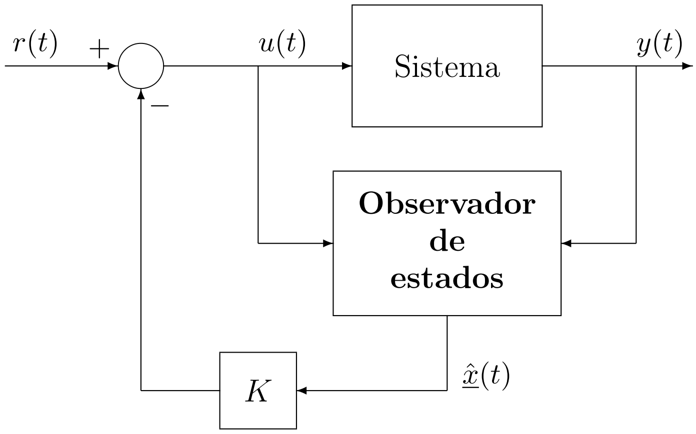

Figura 4: Sistema com realimentação de estados em que os estados são estimados por um observador (exercício 4)

Obtenha a representação em espaço de estados correspondente ao sistema em malha fechada, considerando como vetor de estados:

$$\underline{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{e}(t) \end{bmatrix}.$$

5. Considere um sistema cuja função de transferência é:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s+3)}{(s+1)(s+2)}.$$

(a) Obtenha uma representação em espaço de estados.

(b) Desenhe o correspondente diagrama de simulação.

6. Obtenha as equações dinâmicas para o sistema cujo diagrama de simulação está representado na figura 5.

7. Obtenha as equações dinâmicas para o sistema cujo diagrama de simulação está representado na figura 6.

8. Sejam $[A, \underline{b}, \underline{c}, d]$, $d \neq 0$, as matrizes de uma realização referente a um sistema cuja entrada é $u(t)$ e cuja saída é $y(t)$. Encontre uma realização para o inverso desse sistema, isto é, considerando-se $y(t)$ como entrada e $u(t)$ como saída.

9. Considere o sistema descrito pela seguinte equação diferencial ordinária:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t).$$

(a) Obtenha uma representação em espaço de estados para esse sistema.

(b) Escolha as variáveis de estados de tal forma que a matriz de transição de estados seja diagonal.

10. Encontre transformações de similaridade de tal forma que as matrizes de estados das novas realizações sejam diagonais ou estejam na forma canônica de Jordan.

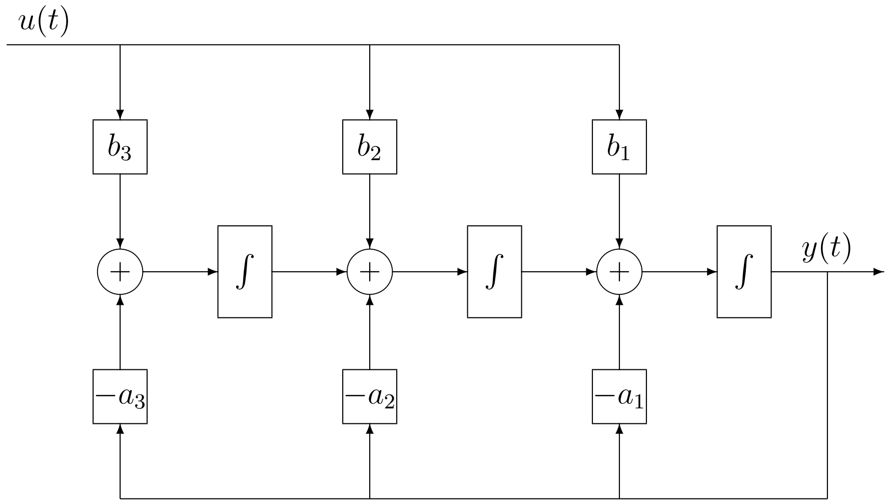

Figura 5: Diagrama de simulação referente ao exercício 6.

$$(a)\ \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + 4u(t) \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

11. Obtenha a função de transferência do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20 & -10 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

12. Considere o sistema cujas equações dinâmicas são:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases} .$$

(a) Obtenha a solução das equações de estados para $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ e $u(t) = \delta(t)$.

(b) Esboce graficamente a resposta $y(t)$, as trajetórias dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e do vetor de estados $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^t$.

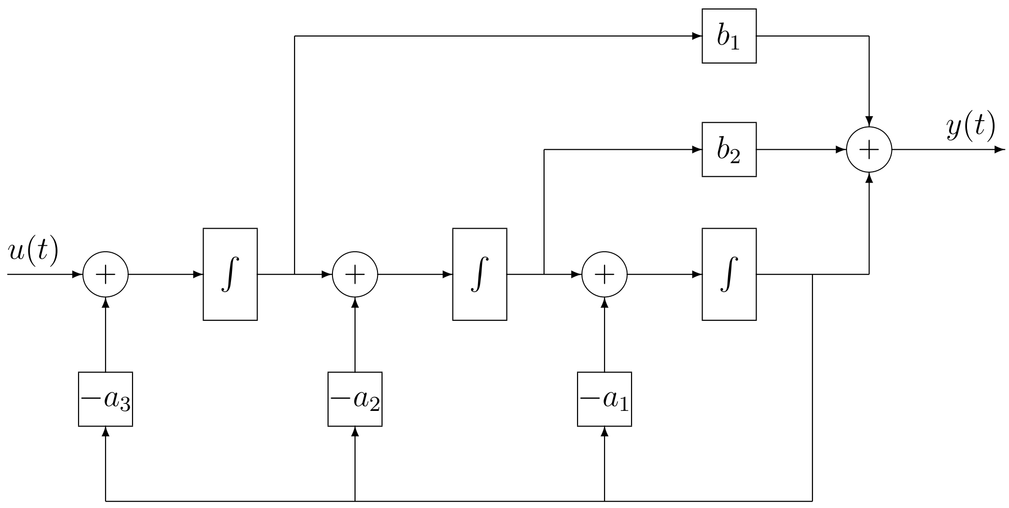

Figura 6: Diagrama de simulação referente ao exercício 7.

13. Para um sistema descrito pela equação de estados

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \underline{x}(t),$$

encontre a resposta $\underline{x}(t)$ para $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} x_{1_0} & x_{2_0} & x_{3_0} \end{bmatrix}^t$ das seguintes formas:

(a) diretamente, a partir da equação de estados;

(b) utilizando e^{At}.

14. Considere o sistema massa-mola-amortecedor da figura 7. Sabe-se que a força de resistência devido ao amortecedor é $f_d(t) = b\dfrac{d}{dt}x(t)$, onde b é o coeficiente de atrito viscoso, e a força de resistência da mola é $f_m(t) = kx(t)$, onde k é a constante de elasticidade da mola. Suponha que o atrito entre o corpo de massa M e a superfície pode ser desprezado e que $f(t)$ é uma força externa.

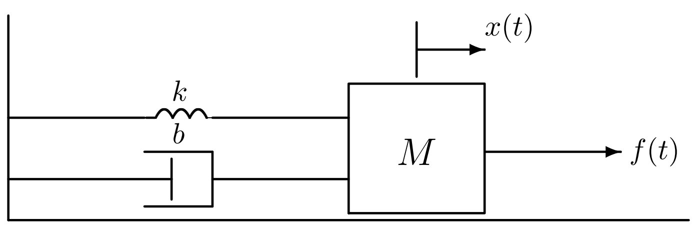

Figura 7: Sistema massa-mola-amortecedor (exercício 14)

(a) Obtenha uma realização em espaço de estados para o sistema supondo como estados $x_1(t) = x(t)$ e $x_2(t) = \dot{x}(t)$, onde $x(t)$ é a posição da massa M no instante t, $f(t)$ a entrada e $x(t)$ a saída.

(b) Obtenha a função de transferência do sistema.

(c) Suponha que a massa tenha sido levada a uma posição inicial $x(t_0) = x_0$ e, então, liberada. Encontre a resposta $x(t)$ supondo $M = 1kg$, $k = 40N/m$ e $b = 1N/(m/s)$.

15. Na figura 8 está representado o circuito equivalente de um motor dc. Sabe-se que a força contra-eletromotriz $e(t)$ é proporcional à velocidade angular, *i.e.*,

$$e(t) = K_g \frac{d}{dt}\theta(t),$$

e que o torque produzido pelo motor é proporcional à corrente de armadura $i_a(t)$, *i.e.*,

$$t_m(t) = K_m i_a(t).$$

Lembre-se que, de acordo com a lei de Newton para o movimento rotacional, o somatório dos torques é igual ao momento de inérica (J) vezes a aceleração angular e que o torque de resistência devido ao atrito e ventilação é proporcional à velocidade angular, *i.e.*

$$t_a(t) = f\frac{d}{dt}\theta(t).$$

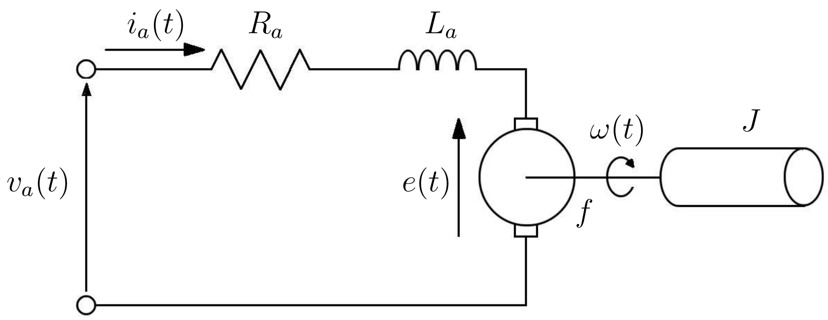

Figura 8: Circuito equivalente de um motor dc controlado pela armadura (exercício 15)

(a) Obtenha as equações dinâmicas para o sistema, supondo como variáveis de estado, $x_1(t) = i_a(t)$, $x_2(t) = \theta(t)$ e $x_3(t) = \dot{\theta}(t)$ e, como entrada e saída, $u(t) = v_a(t)$ e $y(t) = \theta(t)$, respectivamente.

(b) Calcule a função de transferência do sistema.

(c) Supondo condições iniciais nulas e que $R_a/L_a = 10$, $K_g/L_a = 50$, $K_m/J = 0,1$, $f/J = 0,5$ e $1/L_a = 100$, obtenha a resposta $\underline{x}(t)$ para uma entrada $v_a(t) = 10u_0(t)$, onde $u_0(t)$ denota um sinal do tipo degrau de amplitude igual a 1 e aplicado em $t = 0$ e, em seguida, interprete fisicamente o que acontece com os estados $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ quando $t \to \infty$.